Vorlesung 11

Kann das Zufall sein?

Beispiele von statistischen Tests

1. Testen von Anteilen

1a. Fishers exakter Test

“Passen die Verhältnisse in den Rahmen?”

(vgl. Buch S. 130/131

Sir Ronald Fisher

1890-1962

Eine Übungsaufgabe aus Woche 3 des WS 18/19 *

Denken wir uns einen FBR, der aus 9 Vertretern der Informatik und 8 der Mathematik besteht. In einem 5-köpfigen Komitee des FBR findet sich nur ein Vertreter der Informatik.

Wie wahrscheinlich ist eine so extreme Zusammensetzung bei einer rein zufälligen Auswahl?

Genauer: Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass *die Anzahl* X *der Informatiker in einem rein zufällig gebildeten 5-köpfigen Komitee des FBR* mindestes so weit entfernt von $\mu := \mathbf{E}[X]$ ist wie die beobachtete Anzahl 1?

*vgl. dazu die Aufgabe **14** des laufenden Semesters

Die Bilderbuchversion dieser Aufgabe lautet so:

Aus einer Urne mit 9 roten und 8 blauen Kugeln
wurden 5 Kugeln entnommen .
1 davon war rot, und 4 waren blau.

Passt das zur Hypothese
einer rein zufälligen Entnahme der 5 Kugeln?

Oder: *Was ist die Wahrscheinlichkeit eines*
mindestens so extremen Ergebnisses wie das Beobachtete?

$$\mathbf{E}[X] = 5 \cdot \frac{9}{9+8} = 2.65$$

Der beobachtete Ausgang 1 hat von 2.65 die Distanz 1.65.

Die möglichen Ausgänge waren $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Aus diesen sind die Ausgänge 0,1 und 5

mindestens so weit von 2.65 entfernt wie 1.

$$\mathbf{P}(X \in \{0, 1, 5\}) = ?$$

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{g-r}{n-k}}{\binom{g}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

$$\mathbf{P}(X \in \{0, 1, 5\}) = 0.13$$

Unter der Hypothese des rein zufälligen Ziehens
kommt ein so extremer Ausgang nur mit W'keit 0.13 vor.

Würde man das Experiment oft wiederholen,
so bekäme man in ca 13% der Fälle ein mindestens so
extremes Ergebnis.

Einem Vorschlag von R.A. Fisher folgend
spricht man hier vom
p-Wert 0.13
(unter der Hypothese des reinen Zufalls).

“Ungefähr jeses zehnte Mal” ist zwar anders als “alltäglich”,

aber auch nicht “richtig selten”.

Salopp ausgedrückt:

Ein p-Wert 0.13 kann uns nicht so richtig stutzig machen.

(und erlaubt uns wohl nicht,

die Hypothese des reinen Zufalls abzulehnen –

eingebürgert hat sich hierfür ddie Schranke 0.05).

Noch ein Beispiel:

Gleiches Modell, andere Zahlen, frische Anwendung:

Aus einer Urne mit 80 roten und 87 blauen Kugeln

wurden 113 Kugeln entnommen.

40 davon waren rot, und 73 waren blau.

Passt das zur Hypothese, dass die Kugeln

rein zufällig gezogen wurden?

Stimmen die Verhältnisse einigermaßen,

oder fallen sie aus dem Rahmen?

	gezogen	nicht gezogen	Summe
rot	40	40	80
blau	73	14	87
Summe	113	54	167

Unter den 113 gezogenen Kugeln erwartet man

ähnliche Verhältnisse wie in der gesamten Urne:

80: 167 für rot, 87 : 167 für blau.

Tatsächlich ergab sich in der Stichprobe

für rot ein **sehr** unterdurchschnittliches Ergebnis !

Wie lässt sich das quantifizieren?

	gezogen	nicht gezogen	Summe
rot	$\mathbf{40}$	40	80
blau	73	14	87
Summe	113	54	167

Unter des Hypothese des rein zufälligen Ziehens

ist die Anzahl X der gezogenen roten Kugeln

hypergeometrisch verteilt

mit Parametern $n = 113$, $g = 167$, $r = 80$.

Dafür ergibt sich:

$$\mathbf{E}[X] = n \cdot \frac{r}{g} = 54.1 \ .$$

	gezogen	nicht gezogen	Summe
rot	$\mathbf{40}$	40	80
blau	73	14	87
Summe	113	54	167

Unter des Hypothese des rein zufälligen Ziehens

ist die Anzahl X der gezogenen roten Kugeln

hypergeometrisch verteilt

mit Parametern $n = 113$, $g = 167$, $r = 80$.

Dafür ergibt sich:

$$\mathbf{E}[X] = n \cdot \frac{r}{g} = 54.1 \ .$$

	gezogen	nicht gezogen	Summe
rot	**40**	40	80
blau	73	14	87
Summe	113	54	167

Die Wahrscheinlichkeit, ein Ergebnis zu erhalten,

das mindestens so weit von 54 weg ist

wie der beobachtete Wert 40, ist

$$\mathbf{P}\big(|X - 54| \geq |40 - 54|\big)$$

$$= \mathbf{P}(X \leq 40) + \mathbf{P}(X \geq 68)$$

$$= 5.57 \cdot 10^{-6} \, .$$

$$\mathbf{P}\big(|X - 54| \geq |40 - 54|\big) = 5.6 \cdot 10^{-6}$$

Was bedeutet das?

Fazit: Angenommen die Hypothese trifft zu.

Dann tritt ein Ergebnis, das so extrem ist wie das beobachtete, gerade 6 mal in einer Million auf.

Damit wird die Hypothese mehr als fragwürdig.

Man nennt die berechnete Wahrscheinlichkeit

den zu den Daten gehörigen p-Wert

oder auch das *beobachtete Signifikanzniveau*,

zu dem die Hypothese abgelehnt wird.

Wie passt unser Urnen-Beispiel in die Welt?

Es geht (wieder) um die Fragestellung

“Passen die Proportionen

– oder sollte man

an der Hypothese der reinen Zufälligkeit zweifeln?”

Wird unsere Einstellung gegenüber Fakten

durch deren Verpackung beeinflusst?

Dazu eine (wahre oder zumindest gut erfundene) Geschichte:

Zu einer bestimmten Krankheit gibt es zwei

Therapiemethoden, eine sanfte (T1) und eine harte (T2).

Eine klinische Studie hatte als Fakten ergeben:

T1 war in 70% der Fälle erfolgreich,

T2 in 80% (allerdings mit mehr Nebenwirkungen).

Am Ende einer Sommerschule wurden diese Fakten

in zwei verschiedene Formen A und B verpackt,

zusammen mit einer Frage:

A. Die sanfte Therapiemethode T1 brachte

in nicht weniger als 30% der Fälle keinen Heilungserfolg,

wohingegen die harte Therapiemethode T2

in immerhin 80 % der Fälle erfolgreich war.

Welche Therapiemethode würden Sie bevorzugen?

B. Die harte Therapiemethode T2 brachte

in nicht weniger als 20% der Fälle keinen Heilungserfolg,

wohingegen die sanfte Therapiemethode T1

in immerhin 70 % der Fälle erfolgreich war.

Welche Therapiemethode würden Sie bevorzugen?

Von insgesamt 167 Ärzt*inn*en

wurden **rein zufällig** 80 ausgewählt,

denen die Botschaft in der Form A vermittelt wurde,

die restlichen 87 bekamen die Botschaft in der Form B.

Jede(r) hatte sich daraufhin für die Bevorzugung

einer der beiden Therapiemethoden zu entscheiden.

Das Ergebnis war:

	“bin eher für T1”	“bin eher für T2”	Summe
A	40	40	80
B	73	14	87
Summe	113	54	167

Angenommen

die 113 Befürworter der (sanften) Behandlungsmethode T1

und die 54 Befürworter der (harten) Behandlungsmethode T2

sind zu iher Einstellung aufgrund der Fakten gekommen

und nicht aufgrund von deren Verpackungen.

Das heißt dann, dass die Zuteilung der

80 Formulare mit der Botschaft in der Form A und der

87 Formulare mit der Botschaft in der Form B

auf die 113 Befürworter von T1

rein zufällig (durch Ziehen ohne Zurücklegen) erfolgt ist.

Für das Testen der Hypothese

“Die Verpackung der Botschaft

hat keinen Einfluss auf die Entscheidung”

eignet sich das vorher besprochene Urnenmodell.

Unter dieser Hypothese

kommt die Aufteilung der $80 + 87$ Formulare

auf die 113 Befürworter von T1

und die 54 Befürworter von T2

rein zufällig zustande.

So gesehen kann das Ergebnis “wohl kaum Zufall sein”:

unter unserer Hypothese tritt ein Ausgang,

der so extrem ist wie der beobachtete,

gerade mal 6 mal in einer Million auf.

1b. Testen von Anteilen mit der Normalapproximation

Wenn (wie im vorigen Beispiel)

der Stichprobenumfang n einigermaßen groß ist,

(und beim Ziehen ohne Zurücklegen auch $g - n$ groß ist)

bietet die *Normalapproximation*

eine weitere Möglichkeit des Testens der Hypothese

“Die Verhältnisse passen zueinander”:

	gezogen	nicht gezogen	Summe
rot	40	40	80
blau	73	14	87
Summe	113	54	167

Anteilsschätzung über die Normalapproximation:

$X :=$ Anzahl roter Kugeln bei $n = 113$ Zügen

ohne Zurücklegen aus einer Urne mit $g = 167$ Kugeln,

von denen 80 rot sind.

$$\mathbf{E}[X] = np$$

mit

$$p = \frac{80}{167}$$

	gezogen	nicht gezogen	Summe
rot	40	40	80
blau	73	14	87
Summe	113	54	167

$H = \frac{X}{n}$ ist approximativ normalverteilt

(trotz der schwachen Abhängigkeiten beim Ziehen ohne Zurücklegen), mit

$$\mathbf{E}[H] = \mu_H = p = \frac{80}{167},$$

$$\sigma_H^2 = \frac{p(1-p)}{n}\,\frac{g-n}{g-1},$$

$$\sigma_H = \sqrt{0.022 \cdot 0.326} = 0.0268$$

	gezogen	nicht gezogen	Summe
rot	40	40	80
blau	73	14	87
Summe	113	54	167

$Z := \frac{H - \mu_H}{\sigma_H}$ ist approximativ N$(0, 1)$-verteilt

Der beobachtete Wert von Z war $z = -4.67$.

$$\mathbf{P}(|Z| > 4.67) = 3 \cdot 10^{-6}$$

ist hier der p-Wert, zu dem die Hypothese abgeleht wird.

2. Tests der Hypothese $\mu = \mu_0$

“Kann *diese* Verschiebung des Mittelwertes Zufall sein?”

n reelle Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ haben den Mittelwert m.

Unterscheidet sich der beobachtete Mittelwert m signifikant von einem hypothetischen "Populationsmittelwert" μ_0?

Eine Auskunft gibt ein Vergleich

des Unterschiedes $|m - \mu_0|$

mit der geschätzen Standardabweichung
des Stichprobenmittelwertes
$s/\sqrt{n}$.

Wir können fragen:
Um weches Vielfache von $s/\sqrt{n}$
unterscheidet sich m von μ_0?

Dies erhält seinen theoretischen Unterbau

durch die goldene Idee der Statistik

(*man fasse die* x_i *auf als Realisierungen von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen* X_i *mit Erwartungswert* μ *und Varianz* σ^2*)*

und den Zentralen Grenzwertsatz:

Für große n *ist der Stichprobenmittelwert* $\bar{X}$ *approximativ* $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$*-verteilt*.

2a. Normalapproximation.

Für große n ist

$\bar{X} - \mu$ approximativ $\mathrm{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$-verteilt.

Bei bekanntem σ sei $z := \dfrac{m - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Unter der Hypothese $\mu = \mu_0$ ist

$$\mathbf{P}(|\bar{X} - \mu_0| \geq |m - \mu_0|) \approx \mathbf{P}(|Z| \geq |z|),$$

mit $\mathrm{N}(0, 1)$-verteiltem Z.

In der Praxis ist σ meist unbekannt.

Aber:

Für große n ist S mit großer W'keit nahe bei σ.

Also ist für große n

$T := \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ approximativ N$(0,1)$-verteilt.

Sei $t := \dfrac{m - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$.

Unter der Hypothese $\mu = \mu_0$ ist für große n

$$\mathbf{P}(|T| \geq |t|) \approx \mathbf{P}(|Z| \geq |t|),$$

mit N$(0,1)$-verteiltem Z.

Beispiel:

Ist für großes n der "Wert der t-Statistik"

$$t = \frac{m - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

gleich 2, dann ergibt sich

$$\mathbf{P}(|Z| \geq 2) \approx 0.05.$$

Man spricht vom p-Wert für die Ablehnung

der Hypothese $\mu = \mu_0$ zugunsten der Alternative $\mu \neq \mu_0$.

Oft gibt man sich ein *Signifikanzniveau* α vor.

Wenn der p-Wert kleiner als α ist, sagt man: Die Hypothese $\mu = \mu_0$ kann zugunsten der Alternative $\mu \neq \mu_0$ zum Niveau α abgelehnt werden.

Populär ist die Wahl $\alpha = 0.05$.

2b. Der t-Test

Wieder fragen wir:

“Kann *diese* Verschiebung des Mittelwertes Zufall sein?”

Was lässt sich aus der Teststatistik T

bei kleinem Stichprobenumfang n ablesen?

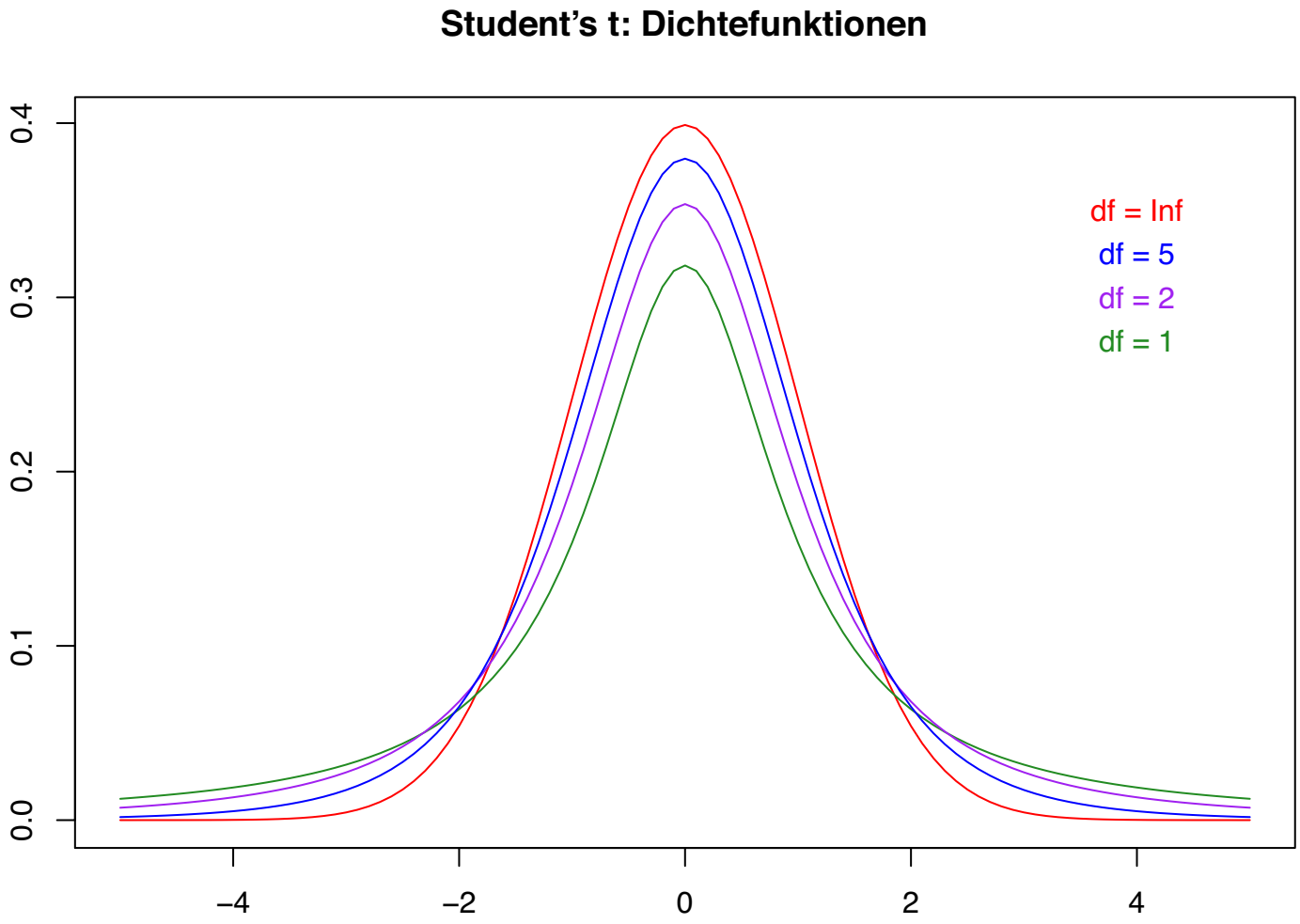
Unter der zusätzlichen Modellannahme

$X_1, \ldots, X_n$ sind (unabhängig und) $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt

$$\text{ist } T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \text{ so verteilt wie}$$

T_{n-1} := eine student-verteilte Zufallsvariable
mit $n - 1$ Freiheitsgraden (degrees of freedom, df),
vgl. F10 Folie 25.

Diese Verteilung kennt R gut (Befehl für Verteilungsfunktion: `pt(q,df)`);
sie lässt sich aus der Rotationssymmetrie der n-dimensionalen
Standard-Normalverteilung auch gut verstehen (Buch Seite 132).



Dichten von T_{df}

Beispiel:

Ist für $n = 16$ der "Wert der t-Statistik"

$$t = \frac{m - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

gleich 2.5, dann ergibt sich

$$\mathbf{P}(|T_{15}| \geq 2.5) = 2\mathbf{P}(T_{15} \geq 2.5)$$

$$= 2(1 - \mathrm{pt}(2.5, 15)) = 0.025.$$

Man spricht vom p-Wert für die Ablehnung

der Hypothese $\mu = \mu_0$ zugunsten der Alternative $\mu \neq \mu_0$.

Oft gibt man sich ein *Signifikanzniveau* α vor.

Wenn der p-Wert kleiner als α ist, sagt man: Die Hypothese $\mu = \mu_0$ kann zugunsten der Alternative $\mu \neq \mu_0$ zum Niveau α abgelehnt werden.

Populär ist die Wahl $\alpha = 0.05$.

3 Tests der Hypothese $\mu_1 = \mu_2$

bei ungepaarten Strichproben.

“Unterscheiden sich zwei Mittelwerte signifikant?”

Man stelle sich vor: Die Mittelwerte m_x und m_y

von zwei Stichproben des Umfangs n_x und n_y

unterscheiden sich um 0.5 Einheiten: $|m_y - m_x| = 0.5$.

Ist dieser Unterschied signifikant?

Das kommt drauf an ...

Nach bewährtem Rezept vergleichen wir $|m_x - m_y|$

mit seiner geschätzten Standardabweichung f.

Weil wir hier an unahängige Stichproben denken,

addieren sich die Varianzen:

$$f := \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

Eine Maßzahl für den “relativen Unterschied” ist also

$$\frac{m_y - m_x}{f}.$$

Anders gefragt: Wie groß ist der beobachtete Wert der Differenz der Stichprobenmittelwerte, gemessen in Einheiten der geschätzen Standardabweichung der Differenz der Stichprobenmittelwerte?

3a. Normalapproximation
(bei großen Stichprobenumfängen)

Mit Hilfe der asymtptotischen Normalität
wird die Antwort leicht: Unter der Hypothese $\mu_X = \mu_Y$
ist $\dfrac{m_y - m_x}{f}$ zu lesen als
Realisierung einer annähernd $N(0,1)$- verteilten
Zufallsvariablen.

Ist dieser Wert (etwa) 1.96, dann bekommt man 0.05
als p-Wert für die Ablehnung der Hypothese $\mu_X = \mu_Y$.

Dabei interpretiert man wiederum die x_i und die y_j

als Realisierungen von

unabhängigen Zufallsvariablen X_i, Y_j,

(mit (X_i) identisch verteilt, (Y_j) identisch verteilt)

und fragt nach der Verteilung von

$$T := \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{F} = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_x} + \frac{S_Y^2}{n_y}}}$$

$$T := \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{F} = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_x} + \frac{S_Y^2}{n_y}}}$$

Für große n_x, n_y ist T annähernd $\mathrm{N}(0, 1)$-verteilt (wegen des Zentralen Grenzwertsatzes und des Gesetzes der großen Zahlen).

3b. Der t-Test
für zwei ungepaarte Stichproben.

Wir betrachten dieselbe Situation wie in 3a.

Was kann man tun für kleine Stichprobenumfänge n_x, n_y?
Hier kommt man zumindest unter der zusätzlichen Annahme weiter, dass die X_i und Y_j normalverteilt sind.

Man kann zeigen, dass T dann annähernd t-verteilt ist

mit einer i.a. nicht ganzzahligen Anzahl von Freiheitsgraden.

Die Formel dafür (die man sich nicht merken muss) findet man auf
http://en.wikipedia.org/wiki/Student's_t-test
im Abschnitt "Equal or unequal sample sizes, unequal variance"

Wichitger ist der praktische Umgang damit in R,

zu dem man dort auf die Frage ?t.test Auskunft bekommt.

4. Der Wilcoxon-Test.

Wie untypisch ist die Lage der Ränge?

Wie eben zuvor geht es um einen Test der Hypothese,

dass zwei Stichproben

aus derselben Verteilung (auf $\mathbb{R}$) kommen,

gegen die Alternative, dass sich die beiden Verteilungen

durch eine Verschiebung unterscheiden.

Die folgende Idee kommt ganz

ohne spezielle Verteilungsannahme aus:

Man ordnet die $n_x + n_y$ Werte der Größe nach

und ersetzt sie durch ihre Ränge $R(x_i)$, $R(y_j)$.

(der kleinste Wert bekommt den Rang 1, der zweitkleinste den Rang 2,...).

Dann beobachtet man die *Rangsumme* $w := \sum_{i=1}^{n_x} R(x_i)$

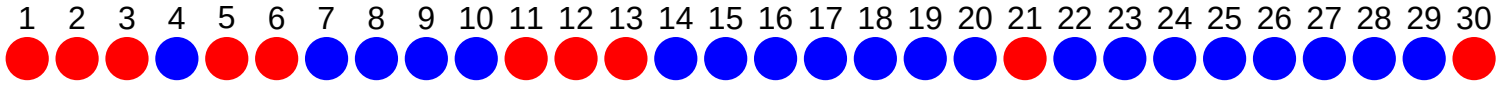
und fragt: Wie wahrscheinlich ist eine

mindestens so "randständige" Rangsumme

bei rein zufälliger Auswahl von n_x Elementen

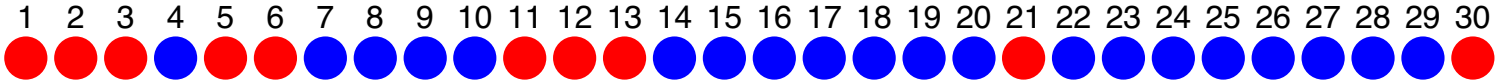
aus der Menge $\{1, \ldots, n_x + n_y\}$?

Die Raenge der x_i und der y_j



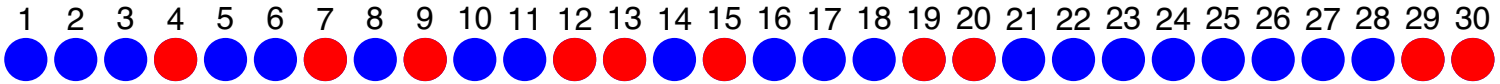
Rangsumme der x_i = 104

Die Raenge der x_i und der y_j



Rangsumme der x_i = 104

Eine zufaellige Permutation



Rangsumme der x_i in der Permutation = 158

Die “beobachtete” Rangsumme war 104.

Die minimale mögliche Rangsumme

einer “roten Teilstichprobe” ist $1 + \ldots + 10 = 55$.

Ihre maximale mögliche Rangsumme ist

$$21 + \ldots + 30 = 255.$$

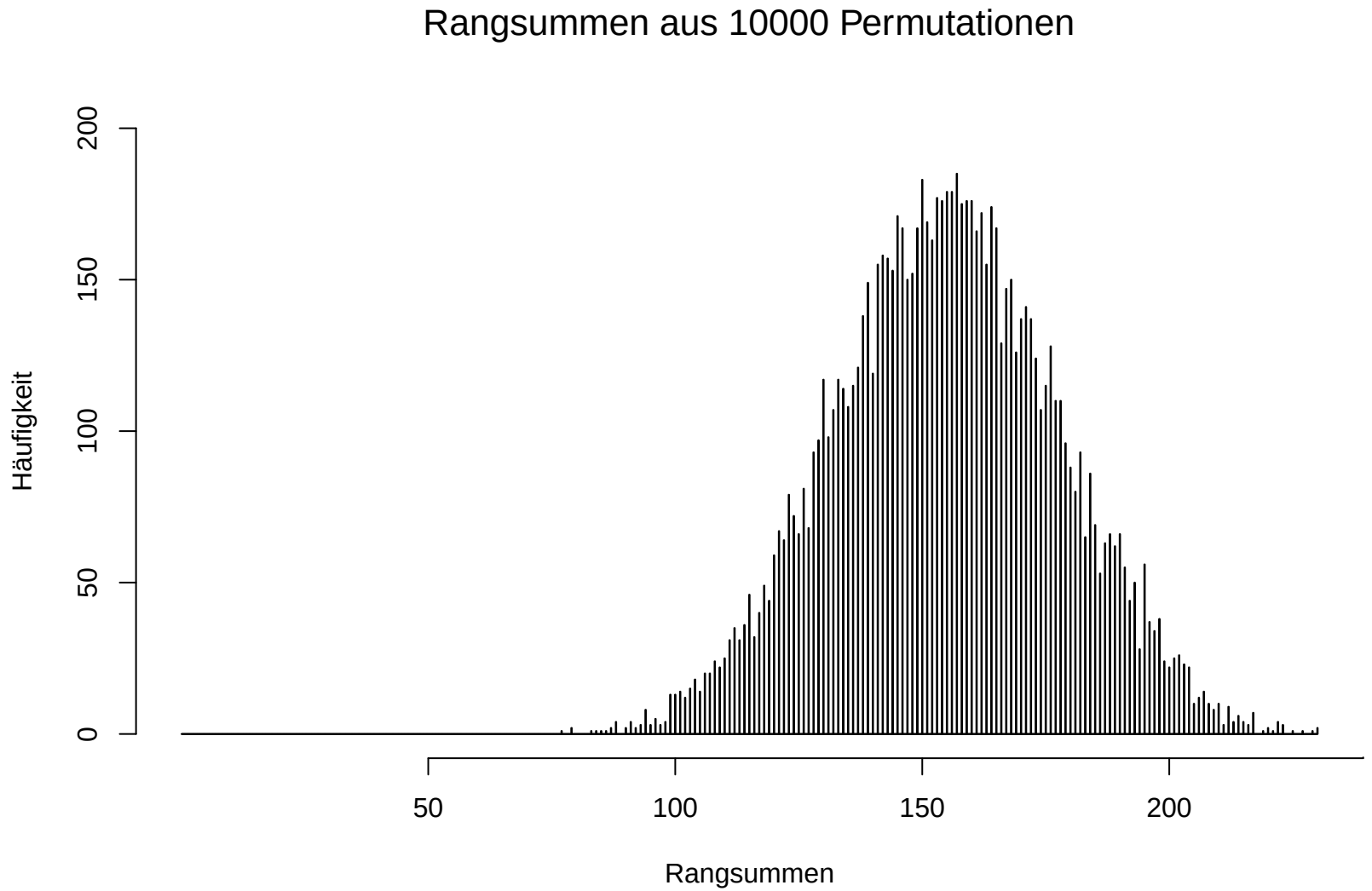
Wir ziehen 10000 mal eine Stichprobe der Größe 10 (aus 30)

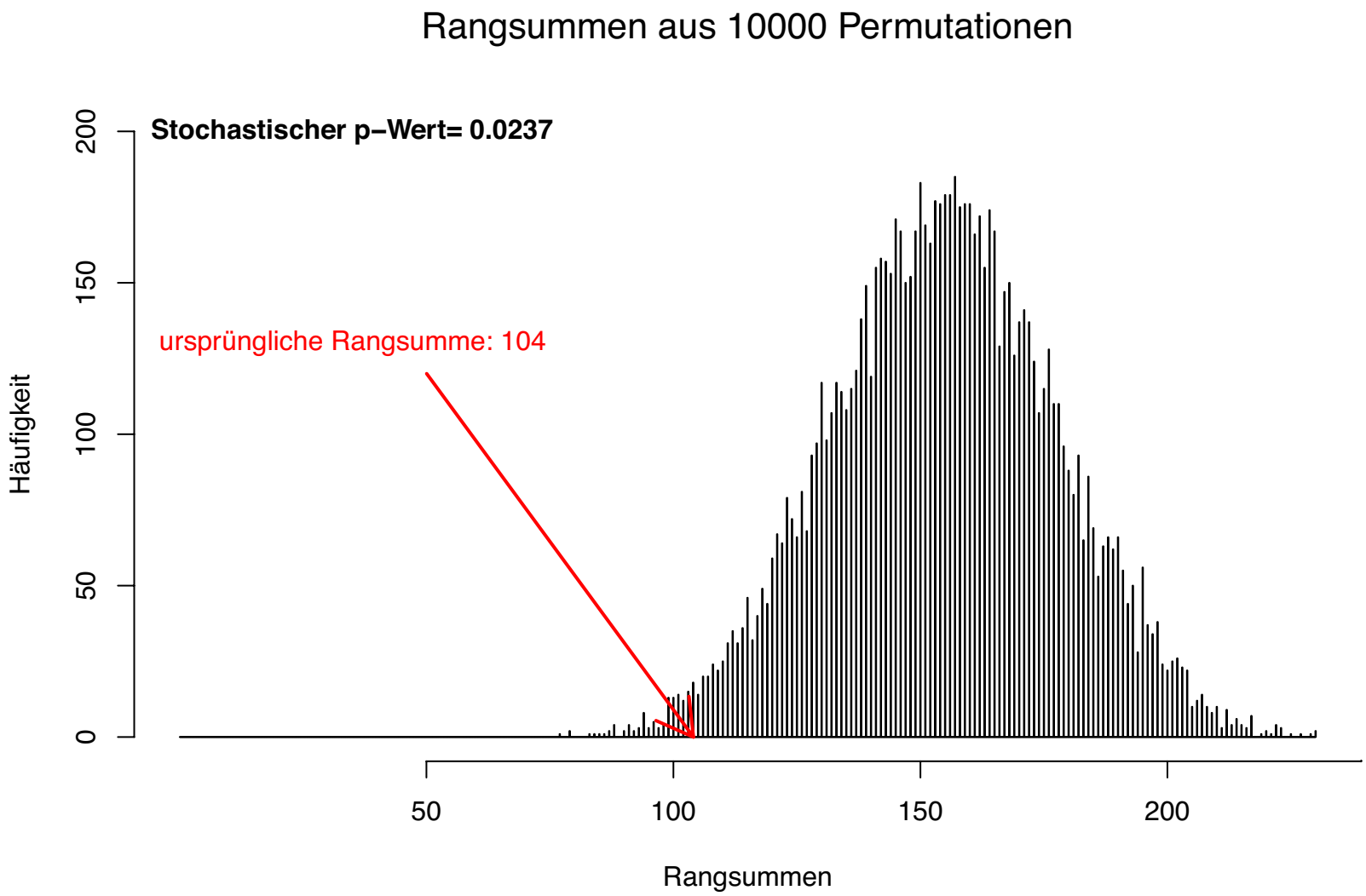
und notieren deren Rangsumme.

Der *stochastische p-Wert* ist die relative Häufigkeit

der Ergebnisse, für die sich eine Rangsumme

≤ 104 oder $\geq 255 - (104 - 55)$ ergibt.


Rangsummen aus 10000 Permutationen
Häufigkeit
0
50
100
150
200
50
100
150
200
Rangsummen


Rangsummen aus 10000 Permutationen
Stochastischer p−Wert= 0.0237
ursprüngliche Rangsumme: 104
Häufigkeit
0
50
100
150
200
50
100
150
200
Rangsummen